7M

УДК 51(071)

Л.П. Мироненко[1], И.В. Петренко[2], И.А. Новикова[1]
[1]Донецкий национальный технический университет, Украина
[2]Государственный университет информатики и искусственного интеллекта, г. Донецк, Украина

К вопросу об упрощении вывода канонических уравнений линий второго порядка

Предложен оригинальный способ вывода уравнений эллипса и гиперболы через выражения для их фокальных радиусов. Эти выражения найдены как решения иррациональных уравнений применительно к линиям второго порядка. Дана общая теория получения канонических уравнений кривых второго порядка эллипса и гиперболы с помощью выражений для их фокальных радиусов. Такой подход значительно упрощает и делает более прозрачной процедуру вывода данных канонических уравнений по сравнению с традиционным методом.

Различают два подхода к изложению материала, связанного с кривыми второго порядка. В основе одного из традиционных подходов кривые второго порядка вводятся соответствующими уравнениями, а геометрические свойства кривых выводятся исходя из алгебраической формы уравнений [1], [2].

В другом подходе в качестве определений принимаются геометрические свойства эллипса, гиперболы и параболы. Например, в качестве определений кривых принимаются геометрические свойства фокальных радиусов. В этом подходе традиционно исходят из определений эллипса, гиперболы и параболы как геометрического места точек, удовлетворяющих определенному, характерному для данной кривой геометрическому свойству. Например, эллипс определяется как г.м.т., для которых сумма расстояний до двух фиксированных точек F_1 и F_2, называемых фокусами, есть величина постоянная. Гипербола определяется аналогично, но вместо суммы расстояний рассматривается абсолютная разность расстояний [3-6].

Существует еще один подход, основанный на использовании свойств симметрии кривых второго порядка, позволяющий провести классификацию кривых из общего алгебраического уравнения второго порядка [7], [8]. Надлежащим выбором декартовой системы координат и определения кривых второго порядка, основанных на свойствах фокальных радиусов и директрис (на различиях значений эксцентриситета), общее уравнение второго порядка приводится к каноническому уравнению соответствующей кривой.

Целью работы является упрощение процедуры получения канонических уравнений эллипса и гиперболы в сравнении с традиционным подходом.

Напомним стандартную постановку задачи, связанной с выводом канонических уравнений линий второго порядка. Определим эллипс как г.м.т. плоскости, для которых сумма фокальных радиусов для любой точки кривой есть величина постоянная: $r_1 + r_2 = const$.

Для вывода канонического уравнения эллипса выберем систему координат, как показано на рис. 1, расположив фокусы $F_1(-c, 0)$ и $F_2(c, 0)$ кривой на оси абсцисс по обе стороны от начала координат.

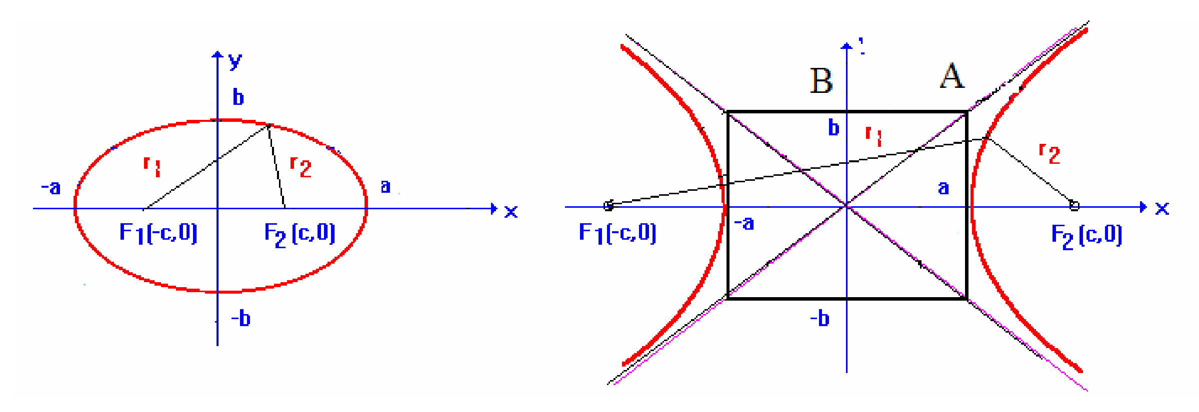


Рисунок 1 – К выводу канонических уравнений эллипса и гиперболы

Запишем определение эллипса

$$r_1 + r_2 = 2a \tag{1}$$

в выбранной системе координат

$$r_1 = \sqrt{(x+c)^2 + y^2},\; r_2 = \sqrt{(x-c)^2 + y^2}\,. \tag{2}$$

Подставим эти значения в основное равенство и получим уравнение

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a\,. \tag{3}$$

В стандартном подходе дальнейшие преобразования состоят в «уничтожении» радикалов путем возведения обеих частей уравнения в квадрат. При преобразовании полученного уравнения, необходимо возводить его в квадрат еще раз и использовать равенство $c^2 = a^2 - b^2$. В результате получится каноническое уравнение эллипса (см. Приложение).

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1. \tag{4}$$

Как приведено в приложении, вывод канонического уравнения эллипса (4) является весьма громоздким.

Каноническое уравнение гиперболы выводится по образцу уравнения (4). Здесь также используется определение гиперболы как г.м.т. плоскости, для которых абсолютная разность фокальных радиусов для любой точки кривой есть величина постоянная $|r_1 - r_2| = const = 2a$. В результате получим

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1. \tag{5}$$

Рассмотрим возможность другого способа вывода канонических уравнений кривых второго порядка эллипса и гиперболы. Вернемся к определению эллипса (1), а выражение в координатах (3) запишем в виде $\sqrt{A} + \sqrt{B} = 2a$. Умножив обе его части на «сопряженное» выражение $\sqrt{A} - \sqrt{B} \neq 0$, получим $A - B = 2a(\sqrt{A} - \sqrt{B})$. Учитывая, что $\sqrt{A} = r_1, \sqrt{B} = r_2$, будем иметь $A - B = r_1^2 - r_2^2 = (x+c)^2 + y^2 - (x-c)^2 + y^2 = 4cx$. В результате, получим систему уравнений

$$\begin{cases} r_1 + r_2 = 2a, \\ r_1 - r_2 = \dfrac{2xc}{a}, \end{cases}$$

которая имеет следующее решение

$$\begin{cases} r_1 = a + \frac{c}{a}x = a + ex, \\ r_2 = r_1 - \frac{2c}{a}x = a - ex. \end{cases} \quad (6)$$

Замечание. Случай $\sqrt{A} - \sqrt{B} \neq 0$ реализуется в точках $x = 0$ и $c = 0$. В случае $r_1 = r_2 = a$ получим окружность.

Далее, возведем в квадрат фокальный радиус $r_1 = a + \frac{c}{a}x$ и используем выражение (2):

$$(x+c)^2 + y^2 = a^2 + 2a\frac{c}{a}x + \left(\frac{c}{a}\right)^2 x^2,\ x^2 + 2xc + c^2 + y^2 = a^2 + 2xc + \left(\frac{c}{a}\right)^2 x^2,$$

$$\left(1 - \frac{c^2}{a^2}\right)x^2 + y^2 = a^2 - c^2.$$

Если ввести обозначение $b^2 = a^2 - c^2$, то получим уравнение (4).

Теперь рассмотрим гиперболу. Обратимся к определению гиперболы (5), а выражение в координатах запишем в виде $\left|\sqrt{A} - \sqrt{B}\right| = 2a$. Умножив обе его части на «сопряженное» выражение $\sqrt{A} + \sqrt{B} > 0$, получим $|A - B| = 2a(\sqrt{A} + \sqrt{B})$. Учитывая, что $\sqrt{A} = r_1, \sqrt{B} = r_2$, найдем $|A - B| = \left|r_1^2 - r_2^2\right| = \left|(x+c)^2 + y^2 - (x-c)^2 + y^2\right| = 4|cx|$. В результате будем иметь систему уравнений

$$\begin{cases} |r_1 - r_2| = 2a, \\ r_1 + r_2 = \frac{2|cx|}{a}, \end{cases}$$

которая имеет следующие решения для правой и левой ветвей:

$$\begin{cases} r_1 = a + \frac{c}{a}x = a + ex, \\ r_2 = -r_1 + \frac{2c}{a}x = -a + ex. \end{cases} \quad \begin{cases} r_1 = -a - \frac{c}{a}x = -a - ex, \\ r_2 = -r_1 - \frac{2c}{a}x = a - ex. \end{cases} \quad (7)$$

Далее, составим уравнение $r_1^2 = \left(a + \frac{c}{a}x\right)^2$, или более подробно $(x+c)^2 + y^2 = \left(a + \frac{c}{a}x\right)^2$. После преобразования имеем $\left(1 - \frac{c^2}{a^2}\right)x^2 + y^2 = a^2 - c^2$. Введем обозначение $b^2 = c^2 - a^2$ и придем к уравнению $-\frac{b^2}{a^2}x^2 + y^2 = -b^2$, т.е. к уравнению (5).

Предложен альтернативный вывод уравнений кривых второго порядка эллипса и гиперболы, который основан на выражениях для фокальных радиусов (через эксцентриситет). Предложенный метод значительно упрощает процедуру получения конечного результата и на наш взгляд имеет ряд преимуществ по сравнению с традиционным способом изложения данного материала. Прежде всего наш метод отли-

чается лаконичностью изложения, что усиливает его наглядный эффект. В процессе его изложения получаются формулы для фокальных радиусов кривых второго порядка, выраженные через эксцентриситет. Данный результат имеет самостоятельное значение и в традиционном изложении выписывается отдельно. В нашей версии канонические уравнения кривых второго порядка получаются исходя из свойств их фокальных радиусов, что, на наш взгляд, является более естественным и органично вписывается в канву данного метода.

Приложение

Вывод канонического уравнения эллипса традиционным способом

Возведем в квадрат уравнение (3)

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2}=2a-\sqrt{(x-c)^2+y^2};\ (x+c)^2+y^2=4a^2-2a\sqrt{(x-c)^2+y^2}+(x-c)^2+y^2;$$

$$2xc=4a^2-4a\sqrt{(x-c)^2+y^2}-2xc;\ a\sqrt{(x-c)^2+y^2}=a^2-xc;$$

$$a^2((x-c)^2+y^2)=a^4-2a^2xc+x^2c^2;\ a^2(x^2-2xc+c^2+y^2)=a^4-2a^2xc+x^2c^2;$$

$$a^2x^2+a^2c^2+a^2y^2=a^4+x^2c^2;\ (a^2-c^2)x^2+a^2c^2+a^2y^2=a^4.$$

Обозначим $b^2=a^2-c^2$ и получим

$$b^2x^2+a^2c^2+a^2y^2=a^4;\ b^2x^2+a^2(a^2-b^2)+a^2y^2=a^4;\ b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2;$$

$$2x^2b^2-2a^2b^2+2y^2a^2=2a^2b^2-2a^2y^2-2b^2x^2\Rightarrow\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1.$$

Литература

1. Кадомцев С.Б. Аналитическая геометрия и линейная алгебра / Кадомцев С.Б. – М. : ФМЛ, 2003. – 157 с.
2. Ефимов Н.В. Краткий курс аналитической геометрии / Ефимов Н.В. – М. : Наука. – 272 с.
3. Александров П.С. Курс аналитической геометрии и линейной алгебры / Александров П.С. – М. : Наука, 1979. – 512 с.
4. Привалов И.И. Аналитическая геометрия / Привалов И.И. – М. : ФМЛ, 1956. – 272 с.
5. Ефимов Н.В. Линейная алгебра и многомерная геометрия / Н.В. Ефимов, Э.Р. Розендорн. – М. : Наука, 1969. – 527 с.
6. Делоне В.И. Аналитическая геометрия / В.И. Делоне, Д.А. Райков. – М. : Гостехиздат, 1949. – Т. 1. – 592 с.
7. Улитин Г.М. Геометрический подход к выводу канонических уравнений линий второго порядка / Г.М. Улитин, Л.П. Мироненко // Сб. науково-методичних робіт. – Донецьк : ДонНТУ, 2009. – Вип. 6. – С. 3-9.
8. Улитин Г.М. Использование свойств симметрии кривых второго порядка для вывода их канонических уравнений. Дидактика математики / Г.М. Улитин, Л.П. Мироненко. – Донецк : ДонНУ, 2009. – С. 32-40.

Л.П. Міроненко, І.В. Петренко, І.А. Новікова

До питання про спрощення виведення канонічних рівнянь ліній другого порядку

Запропонований оригінальний спосіб виведення рівнянь еліпса і гіперболи через вирази для їх фокальних радіусів. Ці вирази знайдені як вирішення іраціональних рівнянь стосовно ліній другого порядку. Дана загальна теорія здобуття канонічних рівнянь кривих другого порядку еліпса і гіперболи за допомогою виразів для їх фокальних радіусів. Такий підхід значно спрощує і робить прозорішою процедуру виведення даних канонічних рівнянь порівняно з традиційним методом.

L.P. Mironenko, I.V. Petrenko, I.A. Novikova

Some Remarks to the Question on Reducing the obtaining of the Canonical equations of Second Order Curves

The alternative method of obtaining the canonical equations of second order curves has been offered. This method is based on expressions for focal radiuses. This way is shorter with respect to the traditional way. The offered method is simple and comfortable in aplying.

Статья поступила в редакцию 16.02.2010.